

תורת ההסתברות

פרק 52 - פונקציה יוצרת מומנטים (פרק 7 ממ"ן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 1

פונקציה יוצרת מומנטים:

רקע:

פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי כלשהו מוגדרת להיות: $M_X(t) = E(e^{tx})$.
אם מדובר במשתנה מקרי בדיד, הפונקציה יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_k e^{tk} \cdot P(X = k)$$

אם מדובר במשתנה מקרי רציף, פונקציית יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x) dx$$

המומנט מסדר n מוגדר להיות: $E(X^n)$.

מומנט מסדר n של משתנה מקרי X מתקבל מהנגזרת ה- n ית לפי t של פונקציית

יוצרת המומנטים $M_X(t)$ בנקודה שבה $t = 0$. כלומר: $M_X^{(n)}(t)|_{t=0} = E(X^n)$.

משפט:

קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.

תזכורת מתמטית לנגזרות:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(k)' = 0$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{כלל שרשרת}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הראו שהפונקציה יוצרת המומנטים של ההתפלגות המעריכית: $X \sim \exp(\lambda)$,

היא: $\frac{\lambda}{\lambda - t}$. מצאו את המומנט הראשון והמומנט השני של ההתפלגות.

שאלות:

(1) נתונה פונקציה ההסתברות הבאה למשתנה מקרי בדיד.

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים.

ב. מצאו את התוחלת על סמך סעיף א'.

X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

(2) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות הבינומית: $X \sim B(n, p)$, ומצאו את המומנט הראשון והשני של הפונקציה.

(3) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של ההתפלגות הגיאומטרית: $X \sim G(P)$, וחשבו את תוחלת של ההתפלגות מתוך פונקציית יוצרת המומנטים.

(4) מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של התפלגות הפואסונית: $x \sim p(\lambda)$. מצאו את המומנט הראשון והשני של ההתפלגות.

(5) יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצאו את ערכו של A .

ב. מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של X .

(6) יהי X משתנה מקרי עם תוחלת 5 ושונות 16, ותהי $m_x(t)$ פונקציית יוצרת המומנטים של X . Y הינו משתנה מקרי עם פונקציית יוצרת מומנטים $m_y(t)$,

$$\text{ונתון: } m_y(t) = t \cdot m_x(t).$$

חשבו את התוחלת והשונות של Y .

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. פונקציה יוצרת מומנטים: } \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{3t} \quad \text{ב. } \frac{2}{3}$$

$$(2) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים: } (e^t \cdot p + 1 - p)^n$$

$$(3) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים: } \frac{e^t p}{1 - e^t \cdot (1 - p)}$$

$$(4) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים: } e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{1 - e^{-7}} \quad \text{ב. פונקציה יוצרת מומנטים: } \frac{e^7}{e^7 - 1} \cdot \frac{e^{7(t-1)} - 1}{t - 1}$$

$$(6) \quad \text{תוחלת: 1, שונות: 9.}$$

נספחים:

פונקציית התפלגות מצטברת $F(X)$	פונקציית צפיפות $f(X)$	התפלגות
$f_x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	אחיד $U(a,b)$
$f_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	מעריכי $\exp(\lambda)$
$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$

התפלגות	$E(X)$	$VAR(X)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$
נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

משתנה מקרי	משמעות	$P_X(x)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
בינומי $Bin(n, p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: P ההסתברות להצלחה. $1 - P = q$ ההסתברות לכישלון X - מספר ההצלחות	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot q$	$[pe^t + q]^n$
גיאומטרי $G(P)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. X - מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה.	pq^{x-1} $x = 1, 2, \dots, \infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1 - qe^t}$
פואסוני $Pois(\lambda)$	X - מספר ההופעות בלידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0, 1, \dots, \infty$.	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t - 1)}$